Aufgabe 1

$\lambda = 12.000$
$x = 32$
$m = 38\ ;\ x + m = 70$
$n^* = 20$
$\pi = 2.015{,}39$

Leistungsbarwert

$$\lambda \cdot B(\Lambda_1) = \lambda \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

Prämienbarwert

$$\pi \cdot B(\Pi_1) = \pi \cdot \frac{N_x - N_{x+n^*}}{D_x}$$

Äquivalenzgleichung

$$\lambda \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} = \pi \cdot \frac{N_x - N_{x+n^*}}{D_x}$$

Auflösen nach N_{x+m+n}

$$\lambda \cdot (N_{x+m} - N_{x+m+n}) = \pi \cdot (N_x - N_{x+n^*})$$

$$N_{x+m} - N_{x+m+n} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot (N_x - N_{x+n^*})$$

$$N_{x+m+n} = N_{x+m} - \frac{\pi}{\lambda} \cdot (N_x - N_{x+n^*})$$

Mit Zahlen

$$N_{70+n} = N_{70} - \frac{\pi}{\lambda} \cdot (N_{32} - N_{52})$$

$$N_{70+n} = 91300 - \frac{2.015{,}39}{12.000} \cdot (847634 - 326660)$$

$$N_{70+n} = 3802{,}85 \approx 3803$$

Damit

$$70 + n = 89$$

Ergebnis: $n = 19$

Aufgabe 2

Zur Ausscheideordnung ($k = 0, \ldots, n-1$)

$${}_{k+1}p_x = p_{x+k} \cdot p_k = {}_kp_x \cdot p$$

$${}_{k+1}p_x = p^{k+1}$$

$${}_kp_x = p^k$$

Leistungsbarwert

$$B(\Lambda) = E_x(\Lambda(T_x)) = E_x\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \lambda_k \chi_{(k,\infty)}(T_x)\right)$$

$$B(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \lambda_k E_x(\chi_{\{k<T_x\}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \lambda_k \;{}_kp_x$$

mit $\lambda_k = \lambda \cdot Q^k$ und ${}_kp_x = p^k$

$$B(\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k \cdot \lambda \cdot Q^k \cdot p^k$$

$$B(\Lambda) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \nu^k \cdot Q^k \cdot p^k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\nu \cdot Q \cdot p)^k$$

setze $\rho = \nu \cdot Q \cdot p$

$$B(\Lambda) = \lambda \cdot \frac{\rho^n - \rho^0}{\rho - 1} = \lambda \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

Prämienbarwert

$$B(\Pi) = \pi$$

Äquivalenzgleichung

Ergebnis: $\pi = \lambda \cdot \dfrac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$

Aufgabe 3

Setze (wie in Formel (75))

$$A_k = \upsilon^{k+1}\ \delta_{k+1}\ q_{x+k}\ {}_kp_x + \upsilon^k\ (\lambda_k - \pi_k)\ {}_kp_x$$

Damit

$$\upsilon\, p_{x+l}\ {}_{l+1}K_x = \upsilon\, p_{x+l}\ \frac{1}{\upsilon^{l+1}\ {}_{l+1}p_x}\ \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k$$

Wegen Formel (18) und da $\upsilon^{k+1} = \upsilon^k\ \upsilon$

$$\ldots = \frac{1}{\upsilon^l\ {}_lp_x}\ \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k = \frac{1}{\upsilon^l\ {}_lp_x}\ \left(\sum_{k=l}^{\infty} A_k - A_l\right)$$

$$\ldots = \frac{1}{\upsilon^l\ {}_lp_x}\sum_{k=l}^{\infty} A_k - \frac{1}{\upsilon^l\ {}_lp_x} A_l$$

Wegen Formel (75)

$$\ldots = {}_lK_x - \frac{1}{\upsilon^l\ {}_lp_x} A_l$$

$$\ldots = {}_lK_x - \frac{1}{\upsilon^l\ {}_lp_x}(\upsilon^{l+1}\ \delta_{l+1}\ q_{x+l}\ {}_lp_x + \upsilon^l\ (\lambda_l - \pi_l)\ {}_lp_x)$$

$$\ldots = {}_lK_x - (\upsilon\ \delta_{l+1}\ q_{x+l} + (\lambda_l - \pi_l))$$

$$\ldots = {}_lK_x - \upsilon\ \delta_{l+1}\ q_{x+l} - \lambda_l + \pi_l$$

Also

$$\upsilon\, p_{x+l}\ {}_{l+1}K_x = {}_lK_x + \pi_l - \lambda_l - \upsilon\ \delta_{l+1}\ q_{x+l}$$

$$\upsilon\, p_{x+l}\ {}_{l+1}K_x + \upsilon\ \delta_{l+1}\ q_{x+l} = {}_lK_x + \pi_l - \lambda_l$$

$$\upsilon\, (\ {}_{l+1}K_x\ p_{x+l} + \delta_{l+1}\ q_{x+l}) = {}_lK_x + \pi_l - \lambda_l$$

Aufgabe 4

Summe bedingter Wahrscheinlichkeiten

$$P[\{S=2\}] = \sum_{x=0}^{2} P[\{N=x\}] \cdot P[\{S=2\} \mid \{N=x\}]$$

Nach Formel (86)

$$P[\{S=2\}] = \sum_{x=0}^{2} \binom{2}{x} \cdot \vartheta^x (1-\vartheta)^{2-x} \cdot P[\{S=2\} \mid \{N=x\}]$$

Es gelten

(1) $P[\{S=2 \mid N=0\}] = 0$ (unmögliches Ereignis)

(2) $P[\{S=2 \mid N=1\}] = 0$ (unmögliches Ereignis)

(3) $P[\{S=2 \mid N=2\}] = P[\{X_1=1\}] \cdot P[\{X_2=1\}] = \eta \cdot \eta = \eta^2$

Also

$$P[\{S=2\}] = 0 + 0 + \binom{2}{2} \cdot \vartheta^2 \cdot (1-\vartheta)^0 \cdot \eta^2 = 1 \cdot \vartheta^2 \cdot 1 \cdot \eta^2 = \vartheta^2 \cdot \eta^2$$

Damit

$$P[\{S<2\}] = 1 - P[\{S=2\}] = 1 - \vartheta^2 \cdot \eta^2$$

Aufgabe 5

a. Ja, denn nach Formel (38) geht der Zinssatz gar nicht in die Berechnung der Spalte „d_x“ ein.

b. Nein, denn nach Formel (41) wird der Abzinsungsfaktor υ in der Form υ^x multipliziert. Offenbar kann aber schon υ^1 ungleich υ^2 sein.

c. Nein, die Ermittlung der Spalte „q_x“ ist für eine beliebig verteilte Zufallsvariable T möglich. Es muss nur $P[\{k < T\}] > 0$ für alle $k \in \mathbf{N}$ gelten.

d. Nein, die Ungleichung gilt für jede Zufallsvariable, sofern ihr Erwartungswert und ihre Varianz existieren.

e. Ja, denn im Falle unendlicher Varianz hat dann die rechte Seite der Ungleichung den Wert 1. Da links eine Wahrscheinlichkeit steht, gilt dies dann in trivialer Weise.

f. Ja, denn dann gilt $X = E[X]$. Somit steht auf der linken Seite $P[\{E[X] \geq E[X] + c\}] = P[\{0 \geq c\}] = 0$ und auf der rechten Seite $0 / (c^2 + 0) = 0$. Also die wahre Aussage $0 \leq 0$.

g. Ja, denn dies folgt mit $c^* = \sqrt{c}$ aus Formel (78), wenn man in $P[\{E[X] \leq X - \sqrt{c}\}]$ die Zufallsvariable X auf der linken Seite isoliert.