Aufgabe 1

m-jährige Erlebensfallversicherung

$$B_x(\Lambda_1) = \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

n-jährige Prämie

$$B_x(\Pi_1) = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Äquivalenzprinzip

$$\lambda \cdot B_x(\Lambda_1) = \pi \cdot B_x(\Pi_1)$$

Also

$$\pi = \frac{\lambda \cdot B_x(\Lambda_1)}{B_x(\Pi_1)} = \frac{\lambda \cdot D_{x+m}}{N_x - N_{x+n}}$$

Differenz (M: Mann, F: Frau)

$$D = \pi^M - \pi^F = \lambda \cdot \left(\frac{D^M_{x+m}}{N^M_x - N^M_{x+n}} - \frac{D^F_{x+m}}{N^F_x - N^F_{x+n}}\right)$$

$$D = 370.000 \cdot \left(\frac{D^M_{67}}{N^M_{53} - N^M_{56}} - \frac{D^F_{67}}{N^F_{48} - N^F_{51}}\right)$$

$$D = 370.000 \cdot \left(\frac{8090}{253221 - 206319} - \frac{9752}{404597 - 345127}\right)$$

$$D = 370.000 \cdot (0{,}172487 - 0{,}163982)$$

Ergebnis: $D = 3.146{,}85$ € (ohne Zwischenrundung: 3.147,03 €)

Aufgabe 2

Um *m* Jahre aufgeschobene lebenslängliche Leibrente

$$\Lambda_1(t) = \sum_{k=m}^{\infty} \upsilon^k \chi_{(k,\infty)}(t)$$

mit $\upsilon = \frac{1}{1+i}$ und $B = \lambda \cdot \Lambda_1(t)$

Voraussetzung: $B > 0$

Sei $n \in \mathbf{N}$ mit $n < t \leq n + 1$, dann

$$\chi_{(k,\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k < t \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$B = \lambda \cdot \Lambda_1(t) = \lambda \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} \upsilon^k \chi_{(k,\infty)}(t) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \upsilon^k \chi_{(k,\infty)}(t)\right)$$

$$B = \lambda \cdot \left(\sum_{k=m}^{n} \upsilon^k 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \upsilon^k 0\right) = \lambda \cdot \sum_{k=m}^{n} \upsilon^k = \lambda \cdot \frac{\upsilon^{n+1} - \upsilon^m}{\upsilon - 1}$$

$$\upsilon^{n+1} = B \cdot \frac{\upsilon - 1}{\lambda} + \upsilon^m$$

$$(n+1) \cdot \ln \upsilon = \ln\left(B \cdot \frac{\upsilon - 1}{\lambda} + \upsilon^m\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(B \cdot \frac{\upsilon - 1}{\lambda} + \upsilon^m\right)}{\ln \upsilon} - 1 \quad \text{(ganzzahlig!)}$$

Ergebnis: Sterbezeitpunkte $t \in (n, n + 1]$

Sonderfall: $B = 0$

Also $\chi_{(k,\infty)}(t) = 0$ für alle $k < m$

Ergebnis: Sterbezeitpunkte $t \in [0, m]$

Aufgabe 3

$P_x[\{k < T_x \le k{+}1\}]$

$= P_x[\{T_x \le k{+}1\}] \; - P_x[\{T_x \le k\}]$

$= (1 - P_x[\{k{+}1 < T_x\}]) \; - (1 - P_x[\{k < T_x\}])$

nach Formel (14)
$= (1 - {}_{k+1}p_x) - (1 - {}_kp_x)$

$= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$

nach Formel (19)
$= \; q_{x+k} \;\; {}_kp_x$

Aufgabe 4

Linke Seite der Gleichung mit Formel (44)

$$M_x = \sum_{j=0}^{\infty} C_{x+j}$$

nach Formel (42)

$$M_x = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j+1} d_{x+j}$$

nach Formel (38)

$$M_x = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j+1} (l_{x+j} - l_{x+j+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} (\upsilon^{x+j+1} l_{x+j} - \upsilon^{x+j+1} l_{x+j+1})$$

$$M_x = \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j+1} l_{x+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j+1} l_{x+j+1}$$

mit Ausklammern von υ (erste Summe) und Indextransformation (zweite Summe)

$$M_x = \upsilon \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j} l_{x+j} - (\sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j} l_{x+j} - \upsilon^x l_x)$$

$$M_x = \upsilon \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j} l_{x+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j} l_{x+j} + \upsilon^x l_x$$

$$M_x = (\upsilon - 1) \sum_{j=0}^{\infty} \upsilon^{x+j} l_{x+j} + \upsilon^x l_x$$

nach Formel (41)

$$M_x = (\upsilon - 1) \sum_{j=0}^{\infty} D_{x+j} + D_x$$

nach Formel (41)

$$M_x = (\upsilon - 1) N_x + D_x$$

Aufgabe 5

a. Nein, denn die Voraussetzung bedeutet nur, dass die Lebensdauer (als Zufallsvariable) mit (strikt) positiver Wahrscheinlich jede beliebige Schranke überschreiten kann. Die realisierte Lebensdauer nimmt einen bestimmten Wert an.

b. Nein, denn $P_x[A]$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung $\{x < T\}$. Dagegen ist $P[A]$ die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit von A. Es gilt die Beziehung
$P_x[A] = P[A \cap \{x < T\}] \,/\, \mathrm{P}[\{x < T\}]$

c. Ja, denn aus Formel (20) folgt mit Logarithmieren

$$\ln({}_kp_x) = \ln\Big(\prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}\Big) = \sum_{j=0}^{k-1} \ln(p_{x+j})$$

d. Nein, denn der Gesamtschaden ist eine Summe der Einzelschäden. Beispielsweise schon für $N = 2$ (Konstante) und Bernoulli-verteilte Einzelschäden ist S binomialverteilt mit Parameter $n = 3$.

e. Nein, denn die Zufallsvariable N muss als Werte ganze, nichtnegative Zahlen haben. Die Normalverteilung hat als Werte aber alle reellen Zahlen.

f. Ja, denn es sind alle Voraussetzungen eines Binomial-Modells für den Fall einer Schadenhöhe $a = 1$ erfüllt.

g. Nein, da N eine Zufallsvariable ist, muss man einen aufwändigeren Beweis führen. Nur im Spezialfall $N = n$ konstant, folgt die Gleichung dann wegen $\mathrm{E}[N] = n$ direkt aus der Linearität des Erwartungswerts.