

Aufgabe 1

Binomial-Modell

Wahrscheinlichkeitsfunktion der Schadenfälle
mit $n = 650$, $\vartheta = 0,001$

$$P[\{R = x\}] = \binom{650}{x} \cdot 0,001^x \cdot 0,999^{650-x}$$

Ruinwahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0,03$, also $1 - \varepsilon = 0,97$

x	$P[\{R = x\}]$	$P[\{R \leq x\}]$
0	0,521876	0,521876
1	0,339559	0,861435
2	0,110297	0,971732

Also

$$P[\{R \leq 2\}] \geq 1 - \varepsilon$$

$$P[\{R > 2\}] \leq \varepsilon$$

$$P[\{S > a \cdot 2\}] \leq \varepsilon$$

Kollektive Prämie nach dem Verteilungs-Prinzip

$$H^*[S] = E[S] + \min\{c \in \mathbf{R} \mid P[\{S > E[S] + c\}] \leq \varepsilon\}$$

Damit wegen $a = 60.000$

$$E[S] + c = a \cdot 2 = 60.000 \cdot 2 = 120.000$$

Individuelle Prämie nach dem Verteilungs-Prinzip

$$H^*[Z] = \frac{H^*[S]}{n} = \frac{120.000}{650} = 184,62$$

Also 184,62 €

Aufgabe 2

Mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeiten für $x, k = 0, 1, 2, \dots$

$${}_k p_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j}$$

Einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten für $x = 0, 1, 2, \dots$

$$q_x = 1 - p_x$$

2-jährige gemischte Versicherung

$$\delta B_x(\Delta_1) + \lambda B_x(\Lambda_1) = \delta \sum_{k=0}^{2-1} v^{k+1} q_{x+k} {}_k p_x + \lambda v^m {}_m p_x$$

2-jährige Prämie

$$\pi \cdot B_x(\Pi_1) = \pi \cdot \sum_{k=0}^{2-1} v^k {}_k p_x$$

Äquivalenzgleichung

$$\delta \sum_{k=0}^{2-1} v^{k+1} q_{x+k} {}_k p_x + \lambda v^2 {}_2 p_x = \pi \cdot \sum_{k=0}^{2-1} v^k {}_k p_x$$

$$\delta \cdot (v q_x {}_0 p_x + v^2 q_{x+1} {}_1 p_x) + \lambda v^2 {}_2 p_x = \pi \cdot ({}_0 p_x + v {}_1 p_x)$$

$$\delta \cdot (v q_x + v^2 q_{x+1} p_x) + \lambda v^2 {}_2 p_x = \pi \cdot (1 + v p_x)$$

$$\delta q_x \cdot v + \delta q_{x+1} p_x \cdot v^2 + \lambda {}_2 p_x \cdot v^2 = \pi + \pi p_x \cdot v$$

$$(\delta q_{x+1} p_x + \lambda {}_2 p_x) \cdot v^2 + (\delta q_x - \pi p_x) \cdot v + (-\pi) = 0$$

Auflösung einer quadratischen Gleichung

$$v = \frac{\pi p_x - \delta q_x \pm \sqrt{(\delta q_x - \pi p_x)^2 + 4(\delta q_{x+1} p_x + \lambda {}_2 p_x) \pi}}{2(\delta q_{x+1} p_x + \lambda {}_2 p_x)}$$

Wähle + oder - so, dass $0 < v < 1$

$$\text{Damit } i = \frac{1}{v} - 1$$

Aufgabe 3

Es gilt für alle $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{\infty} a_k &= \sum_{k=l}^{\max\{l,m\}-1} a_k + \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} a_k + \sum_{k=m+n}^{\infty} a_k \\ &= \sum_{k=l}^{\max\{l-1,m-1\}} a_k + \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} a_k + \sum_{k=m+n}^{\infty} a_k\end{aligned}$$

Leistungsplan einer um m Jahre aufgeschobenen n -jährigen Leibrente

$$0 = \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1}$$

$$\lambda = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+n-1}$$

$$0 = \lambda_{m+n} = \lambda_{m+n+1} = \dots$$

Damit

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{\infty} v^k \lambda_k {}_k p_x &= \sum_{k=l}^{\max\{l-1,m-1\}} v^k 0 {}_k p_x + \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} v^k \lambda {}_k p_x + \sum_{k=m+n}^{\infty} v^k 0 {}_k p_x \\ &= \sum_{k=l}^{\max\{l-1,m-1\}} 0 + \lambda \cdot \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} v^k {}_k p_x + \sum_{k=m+n}^{\infty} 0 \\ &= 0 + \lambda \cdot \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} v^k {}_k p_x + 0 \\ &= \lambda \cdot \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} v^k {}_k p_x\end{aligned}$$

Allgemeiner (erwarteter) Barwert zum Zeitpunkt l

$${}_l B_x(\Lambda) = \frac{1}{v^l {}_l p_x} \sum_{k=l}^{\infty} v^k \lambda_k {}_k p_x$$

Somit

$${}_l B_x(\Lambda) = \lambda \cdot {}_l B_x(\Lambda_1) = \frac{1}{v^l {}_l p_x} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} v^k {}_k p_x$$

Also

$${}_l B_x(\Lambda_1) = \frac{1}{v^l {}_l p_x} \sum_{k=\max\{l,m\}}^{m+n-1} v^k {}_k p_x$$

Aufgabe 4

${}_kq_x$

$$(15) \\ = P_x[\{T_x \leq k\}]$$

$$(\text{Definition } P_x) \\ = P[\{T_x \leq k\} \mid \{0 < T_x\}]$$

$$(\text{Definition bedingte Wahrscheinlichkeit}) \\ = \frac{P[\{T_x \leq k\} \cap \{0 < T_x\}]}{P[\{0 < T_x\}]}$$

$$= \frac{P[\{0 < T_x \leq k\}]}{P[\{0 < T_x\}]}$$

$$(\text{Definition } T_x) \\ = \frac{P[\{0 < T - x \leq k\}]}{P[\{0 < T - x\}]}$$

$$= \frac{P[\{x < T \leq x + k\}]}{P[\{x < T\}]}$$

Aufgabe 5

- a. Ja, denn es gilt $\sum_{k=m}^n 1^k = n - m + 1$. Nur $\frac{1^{n+1} - 1^m}{1 - 1}$ ist nicht definiert.
- b. Nein, es kann auch eine gemeinsame Ursache geben. (Zudem ist „Ursache“ kein Begriff aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.)
- c. Nein, sie kann als Erwartungswert einer ganzzahligen Zufallsvariable auch nichtganzzahlige Werte annehmen.
- d. Ja, mathematisch ist beides vereinbar. Es heißt nur, dass der Versicherte auch nach Auszahlung seiner Erlebensfallleistung noch Prämienzahlungen leisten muss.
- e. Nein, das Deckungskapital kann diese Summe übersteigen. Eine Einmalprämie liefert typischerweise so einen Fall.
- f. Ja, das ist möglich. Der Bestand der Risiken sind dann etwa alle versicherten Personen desselben (ganzzahligen) Alters.
- g. Nein, eine binomial verteilte Zufallsvariable nimmt Werte zwischen 0 und n an, wobei n eine natürliche Zahl ist. Nur für $n = 1$ sind nur Werte von 0 und 1 möglich. Die Zufallsvariable heißt dann Bernoulli-verteilt.