Aufgabe 1

m-jährige gemischte Versicherung
$m = 23$
$x = 44$
$\delta = 120.000$
$\lambda = 80.000$

n-jährige Prämie
$n = 2$

$i = 0{,}0325$
DAV-Sterbetafel 1994 T für Männer

$$\begin{aligned}
\delta B_x(\Delta_1) + \lambda B_x(\Lambda_1) &= 120.000\ \frac{M_{44} - M_{67}}{D_{44}} + 80.000\ \frac{D_{67}}{D_{44}} \\
&= 120.000\ \frac{9283 - 5542}{22872} + 80.000\ \frac{8090}{22872} \\
&= 19.627{,}49 + 28.296{,}61 \\
&= 47.924{,}10
\end{aligned}$$

$$B_x(\Pi_1) = \frac{N_{44} - N_{46}}{D_{44}} = \frac{431743 - 386801}{22872} = 1{,}96494$$

$$\pi = \frac{47.924{,}10}{1{,}96494} = 24.389{,}60$$

$\delta = \delta_1 = \ldots = \delta_{23};\ 0 = \delta_{24} = \delta_{25} = \ldots$
$0 = \lambda_0 = \ldots = \lambda_{22};\ \lambda = \lambda_{23};\ 0 = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \ldots$
$\pi = \pi_0 = \pi_1;\ 0 = \pi_2 = \pi_3 = \ldots$

$$\upsilon = \frac{1}{1{,}0325} = 0{,}968523$$

Deckungskapital zum Zeitpunkt $l = 0$
${}_0K_x = 0$

Rekursionsgleichung des Deckungskapitals für $l = 0, 1, 2$

$$_{l+1}K_x = \frac{_lK_x + \pi_l - \lambda_l - \upsilon\delta_{l+1}q_{x+l}}{\upsilon p_{x+l}}$$

damit

$$\begin{aligned}
{}_1K_x &= \frac{0 + 24.389{,}60 - 0 - 0{,}968523 \cdot 120.000 \cdot q_{44}}{0{,}968523 \cdot p_{44}} \\
&= \frac{24.389{,}60 - 0{,}968523 \cdot 120.000 \cdot 0{,}003726}{0{,}968523 \cdot 0{,}996274} \\
&= 24.827{,}65
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2K_x &= \frac{24.827{,}65 + 24.389{,}60 - 0 - 0{,}968523 \cdot 120.000 \cdot q_{45}}{0{,}968523 \cdot p_{45}} \\
&= \frac{24.827{,}65 + 24.389{,}60 - 0{,}968523 \cdot 120.000 \cdot 0{,}004100}{0{,}968523 \cdot 0{,}995900} \\
&= 50.531{,}99
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_3K_x &= \frac{50.531{,}99 + 0 - 0 - 0{,}968523 \cdot 120.000 \cdot q_{46}}{0{,}968523 \cdot p_{46}} \\
&= \frac{50.531{,}99 - 0{,}968523 \cdot 120.000 \cdot 0{,}004522}{0{,}968523 \cdot 0{,}995478} \\
&= 51.866{,}18
\end{aligned}$$

Tabelle

Ende des … Jahres	Deckungskapital (€)
1.	24.827,65
2.	50.531,99
3.	51.866,18

Aufgabe 2

Es gelten

$B = \lambda \cdot {}_lB_x(\Delta_1) = \lambda \cdot \dfrac{\upsilon^m\, {}_m p_x}{\upsilon^l\, {}_l p_x} \cdot \chi_{\{0,\,1,\,\ldots,\,m\}}(l)$

${}_kp_x = \sum_{j=0}^{k-1} p_{x+j}$ für alle $k \in \mathbf{N}_0$

$p_y = 1 - q_y$ für alle $y \in \mathbf{N}_0$

$\upsilon = \dfrac{1}{1+i}$

Da $l < m$ gilt $\chi_{\{0,\,1,\,\ldots,\,m\}}(l) = 1$

Also

$B = \lambda \cdot \dfrac{\upsilon^m}{\upsilon^l} \cdot \dfrac{{}_m p_x}{{}_l p_x} \cdot 1$

$\dfrac{\upsilon^m}{\upsilon^l} = \dfrac{B}{\lambda} \cdot \dfrac{{}_l p_x}{{}_m p_x}$

Aus $\dfrac{\upsilon^m}{\upsilon^l} = \upsilon^{m-l}$ folgt

$\upsilon = \sqrt[m-l]{\dfrac{B}{\lambda} \cdot \dfrac{{}_l p_x}{{}_m p_x}}$

Wegen $\upsilon \cdot (1 + i) = 1$

$i = \sqrt[m-l]{\dfrac{\lambda}{B} \cdot \dfrac{{}_m p_x}{{}_l p_x}} - 1$

Aufgabe 3

$B_x(\Lambda_1)$

nach Formel (27)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k \, {}_k p_x$$

nach Formel (39)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^k l_{x+k}}{l_x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{x+k} l_{x+k}}{\upsilon^x l_x}$$

nach Formel (41)

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}}{D_x}$$

nach Formel (43)

$$= \frac{N_x}{D_x}$$

Aufgabe 4

$-\max\{b \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{-S \geq b\}] \geq 1-\varepsilon\}$

mit $c = -b$
$= -\max\{-c \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{-S \geq -c\}] \geq 1-\varepsilon\}$

$= \min\{c \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{-S \geq -c\}] \geq 1-\varepsilon\}$

$= \min\{c \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{S \leq c\}] \geq 1-\varepsilon\}$

$= \min\{c \in \mathbf{R} \mid 1-\mathrm{P}[\{S > c\}] \geq 1-\varepsilon\}$

$= \min\{c \in \mathbf{R} \mid -\mathrm{P}[\{S > c\}] \geq -\varepsilon\}$

$= \min\{c \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{S > c\}] \leq \varepsilon\}$

nach Ersetzung von c durch $E[S] + c$
$= \min\{ (E[S] + c) \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{S > (E[S] + c)\}] \leq \varepsilon\}$

$= E[S] + \min\{c \in \mathbf{R} \mid \mathrm{P}[\{S > E[S] + c\}] \leq \varepsilon\}$

nach Formel (90)
$= H^*(S)$

Also ist die rechte gleich der linken Seite der Formel.

Aufgabe 5

a. Nein, denn es wird eine Versicherungsleistung der Höhe δ_{k+1} fällig.

b. Ja, denn es gilt $\chi_{(11;\,13]}(12) = 1$, da $11 < 12 \leq 13$

c. Nein, denn eine Todesfallversicherung ist mit beliebigen Prämienplänen möglich. Insbesondere kann eine Einmalprämie gewählt werden.

d. Nein, denn die gesamte abgezinste Versicherungsleistung entspricht der Summe aller abgezinsten Prämienzahlungen.

e. Nein, denn in einem Modell für einen homogenen Bestand muss die Familie noch zusätzlich identisch verteilt sein.

f. Nein, denn die individuelle Prämie nach dem Verteilungs-Prinzip ist sogar stets kleiner oder gleich als die nach dem Standardabweichung-Prinzip.

g. Ja, denn man braucht ein kollektives Modell für die Erst- und eines für die Rückversicherung.