Aufgabe 1

m-jährige gemischte Versicherung

$$\delta \cdot B_x(\Delta_1) + \lambda \cdot B_x(\Lambda_1) = \delta \cdot \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} + \lambda \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

mit $x = 27$, $m = 33$, $\delta = \lambda$

Einmalprämie $B_x(\pi_1) = 1$ mit $\pi = 45.000$
also

$$\pi = \delta \cdot \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} + \delta \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \delta \cdot \frac{M_x - M_{x+m} + D_{x+m}}{D_x}$$

womit

$$\delta = \frac{\pi \cdot D_x}{M_x - M_{x+m} + D_{x+m}} = \frac{\pi \cdot D_{27}}{M_{27} - M_{60} + D_{60}}$$

$$= \frac{45.000 \cdot 40.762}{10.277 - 7.120 + 11.924}$$

$$= 121.629{,}20 \text{ €}$$

Aufgabe 2

Individuelle Prämie

$$H[Z] = \mu + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{n\varepsilon}}\,\sigma$$

also

$$\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{n\varepsilon}} = \frac{H[Z]-\mu}{\sigma}$$

d. h.

$$\frac{1-\varepsilon}{n\varepsilon} = \left(\frac{H[Z]-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = n\cdot\left(\frac{H[Z]-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Die rechte Seite sei mit A bezeichnet

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = A$$

$$1 - \varepsilon = \varepsilon A$$

$$1 = \varepsilon + \varepsilon A = \varepsilon(1 + A)$$

also

$$\varepsilon = \frac{1}{1+A}$$

Mit den gegebenen Zahlen:

$$A = 18.200 \cdot \left(\frac{3.900-3.200}{900}\right)^2 = 11.009,9$$

$$\varepsilon = \frac{1}{11.010,9} = 0,000.090.819$$

d. h. ε ist rund 0,1 ‰

Aufgabe 3

$q_{x+k} \cdot {}_k p_x$

(19)
$= {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$

(39)
$= \dfrac{l_{x+k}}{l_x} - \dfrac{l_{x+(k+1)}}{l_x}$

$= \dfrac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}$

(38)
$= \dfrac{d_{x+k}}{l_x}$

Aufgabe 4

Individuelle Prämie

$$H[Z] = \mu + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{n\varepsilon}}\,\sigma$$

also

$$\begin{aligned} n \cdot H[Z] &= n \cdot (\mu + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{n\varepsilon}}\,\sigma) = n \cdot \mu + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\,\sqrt{n}\,\sigma \\ &= n \cdot \mu + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\,\sqrt{n\sigma^2} \\ &= E[S] + \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\,\sqrt{\mathrm{var}[S]} \\ &= E[S] + c \end{aligned}$$

wobei $c = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\,\sqrt{\mathrm{var}[S]}$

Ruinwahrscheinlichkeit
$\mathrm{P}[\{S > E[S] + c\}] \le \mathrm{P}[\{S \ge E[S] + c\}]$

(Ungleichung von Cantelli)

$$\le \frac{\mathrm{var}[S]}{c^2 + \mathrm{var}[S]}$$

$$\le \frac{\mathrm{var}[S]}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\mathrm{var}[S] + \mathrm{var}[S]} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + 1} = \frac{1}{\left(\frac{1-\varepsilon+\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

$$= \varepsilon$$

damit $\mathrm{P}[\{S > E[S] + c\}] \le \varepsilon$

Aufgabe 5

a. Nein, denn man muss zusätzlich den technische Zinssatz kennen
b. Ja, denn in der Äquivalenzgleichung kommt auf beiden Seiten das die der Todeszeitpunkt t vor.
c. Nein, die verbleibende Lebensdauer ist eine echte Zufallsvariable. Sie gibt an, wie lange eine Person noch lebt unter der Bedingung, dass sie ein bestimmtes Alter bereits erreicht hat.
d. Ja, das ist so nach Definition, da die Ereignisse $\{k < T_x\}$ und $\{T_x \leq k\}$ komplementär sind.
e. Ja, denn die Verteilung der Lebensdauer legt die Größen l_x und d_x fest. Der technische Zinssatz ergibt υ. Damit sind alle benutzen Größen gegeben.
f. Nein, da der Barwert der noch zu erwartenden Prämienzahlungen nur einer von drei Summanden des Deckungskapitals ist. Die beiden übrigen ändern sich aber mit dem Zeitverlauf.
g. Nein, die Normalverteilung spielt in der Herleitung keine Rolle. Das Standardabweichungsprinzip bezieht sich nur auf Erwartungswert und Varianz der Verteilung.