Aufgabe 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
1	2	1	0	0	16	16:1		
[3]	1	0	1	0	18	18:3	:3	
1	0	0	0	1	10			
−1	−1	0	0	0	−5			
1	2	1	0	0	16	+		
[1]	1/3	0	1/3	0	6	·(−1)	·1	
1	0	0	0	1	10	+		
−1	−1	0	0	0	−5		+	
0	[5/3]	1	−1/3	0	10	6	:(5/3)	
1	1/3	0	1/3	0	6	18		
0	−1/3	0	−1/3	1	4			
0	−2/3	0	1/3	0	1			
0	[1]	3/5	−1/5	0	6	·(−1/3)	·(1/3)	·(2/3)
1	1/3	0	1/3	0	6	+		
0	−1/3	0	−1/3	1	4		+	
0	−2/3	0	1/3	0	1			+
0	1	3/5	−1/5	0	6			
1	0	−1/5	2/5	0	4			
0	0	1/5	−2/5	1	6			
0	0	2/5	1/5	0	5			

Also $x_1 = 4$; $x_2 = 6$ und $z = 5$

Aufgabe 2

Lagrangefunktion:
$Z(x, y, \lambda) = y - 5x + \lambda \cdot (y - e^x)$

Erste Ableitungen:
(1) $Z'_x = -5 - \lambda \cdot e^x$
(2) $Z'_y = 1 + \lambda$
(3) $Z'_\lambda = y - e^x$

Notwendige Bedingungen:
(1) $-5 - \lambda \cdot e^x = 0;\ \lambda \cdot e^x = -5$
(2) $1 + \lambda = 0;\ \lambda = -1$
(3) $y - e^x = 0;\ y = e^x$

Also $-e^x = -5;\ e^x = 5; x = \ln 5$ und $y = e^{\ln 5} = 5$

Hinreichende Bedingung an der Stelle (ln 5, 5):
(1) $Z'_{xx} = -\lambda \cdot e^x = e^{\ln 5} = 5;\ Z'_{xy} = 0;\ Z'_{x\lambda} = -e^{\ln 5} = -5$
(2) $Z'_{yy} = 0;\ Z'_{y\lambda} = 1$
(3) $Z'_{\lambda\lambda} = 0$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 = -5 < 0$$

Damit Minimum $z = 5 - 5 \cdot \ln 5 = 5(1 - \ln 5) = -3{,}04719$

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & b \\ 2b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-b+2b & 2-b+a\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2a+b & 2-b+a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2\end{pmatrix}$$

Damit
$2a + b = 3$
$2 - b + a = -2$

d. h.
$2a + b = 3$
$a - b = -4$

Gaußsches Eliminationsverfahren:

a	b		
2	1	3	+
[1]	−1	−4	·(−2)
0	[3]	11	:3
1	−1	−4	
0	[1]	11/3	·1
1	−1	−4	+
0	1	11/3	
1	0	−1/3	

Also $a = -1/3$ und $b = 11/3$

Aufgabe 4

Substitutionsmethode mit $g = 2\pi \cdot \ln x$

damit $\frac{dg}{dx} = \frac{2\pi}{x}$; $dx = \frac{x\,dg}{2\pi}$

$$\int \frac{\cos(2\pi \cdot \ln x)}{x}\,dx = \int \frac{\cos(g)}{x}\,\frac{x\,dg}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \cos(g)\,dg$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(g) + C$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot \ln x) + C$$

Also

$$\int_a^1 \frac{\cos(2\pi \cdot \ln x)}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi \cdot \ln x)\right]_a^1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot \ln 1) - \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot \ln a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot 0) - \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot \ln a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 0 - \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot \ln a)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot \ln a) = 0$$

d. h.

$\sin(2\pi \cdot \ln a) = 0$

$2\pi \cdot \ln a = \pi \cdot k$ für $k \in \mathbf{Z}$ (Menge aller ganzen Zahlen)

$2 \ln a = k$

$\ln a = \frac{k}{2}$

$a = e^{k/2}$

Ergebnis: $a \in \{ e^{k/2} \mid k \in \mathbf{Z}\}$

Aufgabe 5

$| A - a \cdot A^{-1} | = 0$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a \cdot \frac{1}{1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a \cdot \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -2a \\ 0 & a \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 2-2a \\ 0 & -1+a \end{vmatrix} = 0$$

$(1 - a) \cdot (-1 + a) - (2 - 2a) \cdot 0 = 0$
$-1 + a + a - a^2 = 0$
$-a^2 + 2a - 1 = 0$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Ergebnis: $a = 1$