Aufgabe 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
1	1	1	0	0	9	9:1	+	
−1	[1]	0	1	0	3	3:1	·(−1)	·3
1	0	0	0	1	12			
0	−3	0	0	0	0			+
[2]	0	1	−1	0	6	6:2	:2	
−1	1	0	1	0	3			
1	0	0	0	1	12	12:1		
−3	0	0	3	0	9			
[1]	0	1/2	−1/2	0	3	·1	·(−1)	·3
−1	1	0	1	0	3	+		
1	0	0	0	1	12		+	
−3	0	0	3	0	9			+
1	0	1/2	−1/2	0	3			
0	1	1/2	1/2	0	6			
0	0	−1/2	1/2	1	9			
0	0	3/2	3/2	0	18			

Also $x_1 = 3$; $x_2 = 6$ und $z = 18$

Aufgabe 2

Lagrangefunktion:
$Z(x, y, \lambda) = -x + 3y + \lambda \cdot (y - \ln x)$

Erste Ableitungen:

(1) $Z'_x = -1 - \lambda \cdot \frac{1}{x} = -1 - \frac{\lambda}{x}$

(2) $Z'_y = 3 + \lambda$

(3) $Z'_\lambda = y - \ln x$

Notwendige Bedingungen:

(1) $-1 - \frac{\lambda}{x} = 0;\ \frac{\lambda}{x} = -1;\ \lambda = -x$

(2) $3 + \lambda = 0;\ \lambda = -3$

(3) $y - \ln x = 0;\ y = \ln x$

Also $x = -\lambda = 3$ und $y = \ln 3$

Hinreichende Bedingung an der Stelle (3, ln 3):

(1) $Z'_{xx} = \frac{\lambda}{x^2} = \frac{-3}{3^2} = \frac{-1}{3};\ Z'_{xy} = 0;\ Z'_{x\lambda} = \frac{-1}{x} = -\frac{1}{3}$

(2) $Z'_{yy} = 0;\ Z'_{y\lambda} = 1$

(3) $Z'_{\lambda\lambda} = 0$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \frac{-1}{3} = \frac{1}{3} > 0$$

Damit Maximum $z = -3 + 3 \cdot \ln 3 = 3(\ln 3 - 1) = 0{,}295837$

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ -1 & a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1+b \\ -2-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ b \end{pmatrix}$$

Damit

$2a - 1 + b = -2a$

$-2 - a - b = b$

d. h.

$4a + b = 1$

$-a - 2b = 2$

Gaußsches Eliminationsverfahren:

a	b		
4	[1]	1	·2
−1	−2	2	+
4	1	1	
[7]	0	4	:7
4	1	1	+
[1]	0	4/7	·(−4)
0	1	−9/7	
1	0	4/7	

Also $a = 4/7$ und $b = -9/7$

Aufgabe 4

Substitutionsmethode mit $g = \pi \cdot \ln x$

damit $\frac{dg}{dx} = \frac{\pi}{x}$; $dx = \frac{x\,dg}{\pi}$

$$\int \frac{\sin(\pi \cdot \ln x)}{x}\,dx = \int \frac{\sin(g)}{x}\,\frac{x\,dg}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \int \sin(g)\,dg$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot (-\cos(g)) + C = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(g) + C$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot \ln x) + C$$

Also

$$\int_1^a \frac{\sin(\pi \cdot \ln x)}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi \cdot \ln x)\right]_1^a$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot \ln a) - (-\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot \ln 1))$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot \ln a) + \frac{1}{\pi} \cdot \cos(0)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi \cdot \ln a) + \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot \ln a)) = 0$$

d. h.

$1 - \cos(\pi \cdot \ln a) = 0$

$\cos(\pi \cdot \ln a) = 1$

$\pi \cdot \ln a = 2\pi \cdot k$ für $k \in \mathbf{Z}$ (Menge aller ganzen Zahlen)

$\ln a = 2 \cdot k$

$a = e^{2k}$

Ergebnis: a $\in \{\, e^{2k} \mid k \in \mathbf{Z}\}$

Aufgabe 5

Normieren der Ungleichungen:

(1) $x_2 \le 2$

(2) $a \cdot x_1 - 2x_1 + 2x_2 \le 7$

(3) $3x_3 - a \cdot x_3 \le 5$

damit

$$\begin{array}{lrrr} (1) & & x_2 & & \le 2 \\ (2) & (a-2)\cdot x_1 + & 2x_2 & & \le 7 \\ (3) & & & (3-a)\cdot x_3 & \le 5 \end{array}$$

Voraussetzung 1: $a > 2$

x_1-Koordiante: wegen (2) und $x_2 \ge 0$

$$0 \le x_1 \le \frac{7}{a-2}$$

x_2-Koordiante: wegen (1):

$$0 \le x_2 \le 2$$

Voraussetzung 2: $a < 3$

x_3-Koordiante: wegen (3)

$$0 \le x_3 \le \frac{5}{3-a}$$

Sonderfall 1: $a \le 2$

x_1 (nach oben) unbeschränkt, da (2) einzige Bedingung an x_1

Sonderfall 2: $a \ge 3$

x_3 (nach oben) unbeschränkt, da (3) einzige Bedingung an x_3

Ergebnis: Lösungsmenge beschränkt, genau falls $a \in]2; 3[$