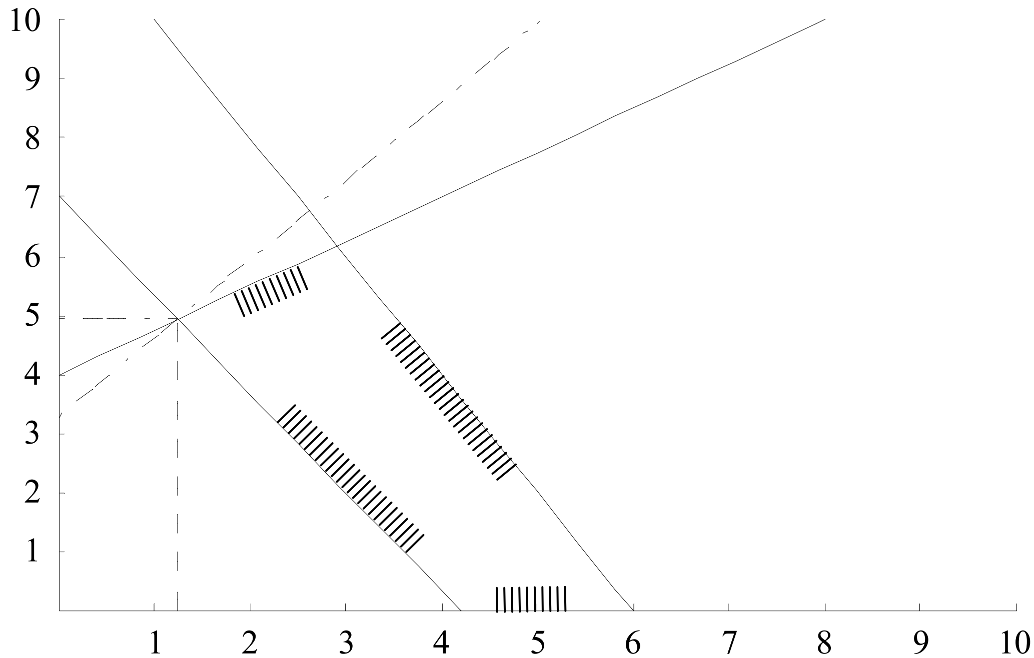
Aufgabe 1

Einzeichnen aller Nebenbedingungen



Die Lösungsmenge ist das Polygon auf der Innenseite der Kämme.

Zielfunktion:
$z = -4x_1 + 3x_2$
$x_2 = \frac{4}{3}x_1 + \frac{z}{3}$
Wähle $z = 0$
$x_2 = \frac{4}{3}x_1$
Verschiebung der Geraden nach oben
$x_1 \approx 1{,}2$ und $x_2 \approx 4{,}9$

Also
$z \approx -4 \cdot 1{,}2 + 3 \cdot 4{,}9 = 9{,}9$

Aufgabe 2

Erste und zweite Ableitungen

$z'_x = -2x + 2y, \quad z'_y = -2ay + 4y + 2x$

$z''_{xx} = -2, \quad z''_{yy} = -2a + 4, \quad z''_{xy} = 2$

Notwendige Bedingung

$z'_x = 0$, also $-2x + 2y = 0, \quad 2y = 2x, \quad y = x$

$z'_y = 0$, womit $-2ax + 4x + 2x = 0, \; x\cdot(-2a + 6) = 0, \; x\cdot(3 - a) = 0$

Voraussetzung: $a \neq 3$

$x = y = 0$

Hinreichende Bedingung

$D = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = (-2) \cdot (-2a + 4) - 2^2 = -4a - 8 - 4 = 4a - 12$

$= 4\cdot(a - 3)$

Fall 1: D > 0, d. h. $a > 3$

dann wegen $z''_{xx} = -2 < 0$ Maximum

$z = -0 - 0 + 0 + 0 = 0$

Fall 2: D < 0, d. h. $a < 3$

dann kein Extremwert

Fall 3: D = 0, d. h. $a = 3$

dann

$z = -x^2 - 3y^2 + 2y^2 + 2xy = -x^2 - y^2 + 2xy = -(x - y)^2 \leq 0$

also Maximum $z = 0$ falls $y = x$, d. h.

$x = c$ beliebig, $\quad y = c \quad$ (unendlich viele Maximalstellen!)

Aufgabe 3

Ansatz: $\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \vec{a}_3 x_3 + \vec{a}_4 x_4 = \vec{0}$

x_1	x_2	x_3	x_4			
[1]	−1	1	3	0	·(−2)	·1
2	−2	2	6	0	+	
−1	−1	1	−1	0		+
1	−1	1	3	0		
0	0	0	0	0	XXX	
0	−2	2	2	0		
1	−1	1	3	0		
0	−2	[2]	2	0	:2	
1	−1	1	3	0	+	
0	−1	[1]	1	0	·(−1)	
1	0	0	2	0		
0	−1	1	1	0		

Die beiden Einheitsvektoren sind linear unabhängig; es sind nur zwei Zeilen übrig.

Also Teilmenge: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$

Aufgabe 4

Substitution $g = (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1$

$$\frac{dg}{dx} = 2x,\ \ dx = \frac{dg}{2x}$$

$$\int \frac{x}{g}\frac{dg}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{g}dg = \frac{1}{2}\ln g + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1) + C$$

Also

$$\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 - 1)\right]_a^{2a} = \frac{1}{2}\left(\ln(4a^2 - 1) - \ln(a^2 - 1)\right) = \ln(\sqrt{5}\,) = \frac{1}{2}\ln 5$$

damit

$$\ln(4a^2 - 1) - \ln(a^2 - 1) = \ln 5$$

$$\ln\frac{4a^2 - 1}{a^2 - 1} = \ln 5$$

$$\frac{4a^2 - 1}{a^2 - 1} = 5$$

$$4a^2 - 1 = 5a^2 - 5$$

$$a^2 = 4$$

Daher $a = 2$ (da $a > 1$)

Aufgabe 5

(a) Cramersche Regel:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}} = \frac{x - \ln x}{x^2 - 1}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1) \cdot (1 - \frac{1}{x}) - (x - \ln x) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

(b) $f'(3) = \dfrac{8 \cdot \frac{2}{3} - (3 - \ln 3) \cdot 6}{8^2} = \dfrac{16 - 18 \cdot (3 - \ln 3)}{8^2 \cdot 3}$

$= \dfrac{18 \cdot \ln 3 - 38}{192} = \dfrac{9 \cdot \ln 3 - 19}{96} \approx -0{,}0949218$