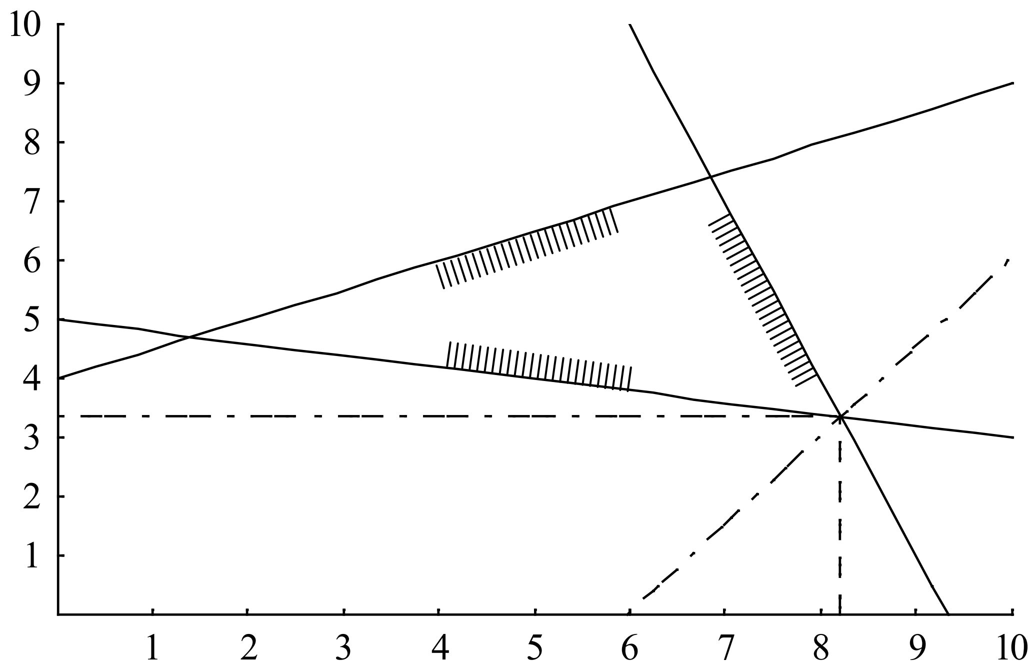
Aufgabe 1

Einzeichnen aller Nebenbedingungen



Die Lösungsmenge ist das Polygon auf der Innenseite der Kämme.

Zielfunktion:
$z = -3x_1 + 2x_2$

$x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{z}{2}$

Wähle $z = 0$

$x_2 = \frac{3}{2}x_1$

Verschiebung der Geraden nach unten

$x_1 \approx 8{,}2$ und $x_2 \approx 3{,}4$

Also

$z \approx -3 \cdot 8{,}2 + 2 \cdot 3{,}4 = -17{,}8$

Aufgabe 2

Erste und zweite Ableitungen

$z'_x = 2ax + 6x + 2y, \quad z'_y = 2y + 2x$

$z''_{xx} = 2a + 6, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = 2$

Notwendige Bedingung

$z'_y = 0$, also $2y + 2x = 0, \quad 2y = -2x, \quad y = -x$

$z'_x = 0$, womit $2ax + 6x + 2(-x) = 0, \; x\cdot(2a + 4) = 0, \; x\cdot(a + 2) = 0$

Voraussetzung: $a \neq -2$

$x = 0, \quad y = 0$

Hinreichende Bedingung

$D = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = (2a + 6) \cdot 2 - 2^2 = 4a + 12 - 4 = 4a + 8$

$= 4\cdot(a + 2)$

Fall 1: D > 0, d. h. $a > -2$

dann wegen $z''_{yy} = 2 > 0$ Minimum

$z = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Fall 2: D < 0, d. h. $a < -2$

dann kein Extremwert

Fall 3: D = 0, d. h. $a = -2$

dann

$z = -2x^2 + 3x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \geq 0$

also Minimum falls $y = -x$, d. h.

$x = c$ beliebig, $\quad y = -c \quad$ (unendlich viele Minimalstellen!)

$z = 0^2 = 0$

Aufgabe 3

Ansatz: $\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \vec{a}_3 x_3 = \vec{0}$

x_1	x_2	x_3			
2	3	1	0	+	
−1	−3	1	0		+
[1]	0	2	0	·(−2)	·1
2	5	−1	0	+	
0	3	−3	0		
0	−3	3	0		
1	0	2	0		
0	5	−5	0		
0	[3]	−3	0	:3	
0	−3	3	0		
1	0	2	0		
0	5	−5	0		
0	[1]	−1	0	·3	·(−5)
0	−3	3	0	+	
1	0	2	0		
0	5	−5	0		+
0	[1]	−1	0		
0	0	0	0	XXX	
1	0	2	0		
0	0	0	0	XXX	
0	[1]	−1	0		
1	0	2	0		

Die beiden Einheitsvektoren sind linear unabhängig; es sind nur zwei Zeilen übrig.

Also Teilmenge: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$

Aufgabe 4

Substitution $g = 1 - x$

$$\frac{dg}{dx} = -1, \;\; dx = -dg$$

Partielle Integration

$$\int g \cdot e^g \, -dg = -\int g \cdot e^g \, dg = -(g \cdot e^g - \int 1 \cdot e^g \, dg)$$

$$= -(g \cdot e^g - e^g + \mathrm{C}) = (1 - g) \cdot e^g + \mathrm{C}$$

$$= (1 - (1 - x)) \cdot e^{1-x} + C = x \cdot e^{1-x} + C$$

Also

$$\left[x \cdot e^{1-x}\right]_0^a = a \cdot e^{1-a} - 0 \cdot e = a \cdot e^{1-a} = 1$$

erfüllt für $a = 1$, da $1 \cdot e^{1-1} = e^0 = 1$

Aufgabe 5

(a)

$\begin{vmatrix} f''(x) & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$, also

$f''(x) \cdot x - 1 = 0$

$f''(x) \cdot x = 1$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$, also $f'(x) = \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + c$

$f'(1) = \ln 1 + c = 1$, also $c = 1$, damit

$f'(x) = \ln x + 1$, also

$f(x) = \int \ln x + 1 dx = \int \ln x dx + \int 1 dx$

partielle Integration:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \ln x - x + d$$

$f(x) = x \cdot \ln x - x + x + d = x \cdot \ln x + d$

$f(1) = 1$, also $1 \cdot \ln 1 + d = 1$, damit $d = 1$, womit

$f(x) = x \cdot \ln x + 1$

(b) $f(2) = 2 \cdot \ln 2 + 1 \approx 2{,}38629$