Aufgabe 1

x_1	x_2	x_3	x_4		
$\boxed{-1}$	-4	1	0	-8	$:(-1)$
1	1	0	1	10	
-1	0	0	0	0	
$\boxed{1}$	4	-1	0	8	$\cdot(-1)$ $+$
1	1	0	1	10	$+$
-1	0	0	0	0	$+$
1	4	-1	0	8	$+$
0	-3	$\boxed{1}$	1	2	$+$ $+$
0	4	-1	0	8	$+$
1	1	0	1	10	
0	-3	1	1	2	
0	1	0	1	10	

Also

$x_1 = 10$

$x_2 = 0$

$z = 10$

Aufgabe 2

Gaußsches Eliminationsverfahren

a	0	$2a$	0	$+$
0	0	0	0	XXX
$\boxed{1}$	a	0	0	$\cdot(-a)$
0	1	1	0	

0	$-a^2$	$2a$	0	$+$
1	a	0	0	
0	1	$\boxed{1}$	0	$\cdot(-2a)$

0	$\boxed{-a^2-2a}$	0	0	$:(-a^2-2a)$
1	a	0	0	
0	1	1	0	

Voraussetzung: $-a^2-2a \neq 0$

0	$\boxed{1}$	0	0	$\cdot(-a)$	(-1)
1	a	0	0	$+$	
0	1	1	0		$+$

0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

Also genau eine Lösung, d.h. Vektoren linear unabhängig, falls $-a^2-2a \neq 0$

Sonderfall $-a^2-2a=0$

d.h. $-a(a+2)=0$

d.h. $a=0$ oder $a=-2$

Dann

$$\begin{array}{ccc|cl}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \times\times\times \\
1 & a & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & a & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Also unendlich viele Lösungen, d.h.
Vektoren linear abhängig, falls
$a=0$ oder $a=-2$

Aufgabe 3

$$\int 3 \sin x \cos x \, dx = 3 \int \sin x \cos x \, dx$$

Partielle Integration $f'(x) = \sin x$, etwa $f(x) = -\cos x$

$g(x) = \cos x$

Damit

$$\ldots = 3 \left((-\cos x) \cos x - \int (-\cos x)(-\sin x) \, dx \right)$$

$$= -3 \cos^2 x - 3 \int \sin x \cos x \, dx$$

Also

$$2 \cdot \int 3 \sin x \cos x \, dx = -3 \cos^2 x + c$$

d.h.

$$\int 3 \sin x \cos x \, dx = -\frac{3}{2} \cos^2 x + c$$

Aufgabe 4

Parabelgleichung:

$$g(x) = cx^2 + bx + a$$

Ableitungen:

$$f'(x) = \cos(x+1) \cdot 1 = \cos(x+1)$$

$$g'(x) = 2cx + b$$

sowie

$$f''(x) = -\sin(x+1) \cdot 1 = -\sin(x+1)$$

$$g''(x) = 2c$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert

$f^{(0)}(0) = g^{(0)}(0)$, d.h. $\sin 1 = a$

$f'(0) = g'(0)$, d.h. $\cos 1 = b$

$f''(0) = g''(0)$, d.h. $-\sin 1 = 2c$

Also

$$a = \sin 1$$

$$b = \cos 1$$

$$c = \frac{-\sin 1}{2}$$

Aufgabe 5

Lagrange-Funktion

$$Z(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 10x + 2y - 23$$
$$+ \lambda(2x + y - 4)$$

Damit

$$Z_x' = -2x + 10 + 2\lambda = -2x \qquad + 2\lambda + 10$$

$$Z_y' = -2y + 2 + \lambda = \qquad -2y + \lambda + 2$$

$$Z_\lambda' = 2x + y - 4 = 2x + y \qquad - 4$$

Notwendige Bedingung: $Z_x' = Z_y' = Z_\lambda' = 0$

Gaußsches Eliminationsverfahren:

x	y	λ		
$\boxed{-2}$	0	2	-10	$:(-2)$
0	-2	1	-2	
2	1	0	4	
$\boxed{1}$	0	-1	5	$\cdot(-2)$
0	-2	1	-2	
2	1	0	4	$+$
1	0	-1	5	
0	-2	1	-2	$+$
0	$\boxed{1}$	2	-6	$\cdot 2$

$$
\begin{array}{ccc|cl}
1 & 0 & -1 & 5 & \\
0 & 0 & \boxed{5} & -14 & :5 \\
0 & 1 & 2 & -6 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & 5 & + \\
0 & 0 & \boxed{1} & -14/5 & + \quad \cdot(-2) \\
0 & 1 & 2 & -6 & \quad\quad + \\
\hline
1 & 0 & 0 & 11/5 & \\
0 & 0 & 1 & -14/5 & \\
0 & 1 & 0 & -2/5 & \\
\hline
\end{array}
$$

Also $x = \frac{11}{5}$ und $y = -\frac{2}{5}$

Hinreichende Bedingung:

$$Z''_{xx} = -2 \qquad Z''_{xy} = 0 \qquad Z''_{x\lambda} = 2$$

$$Z''_{yy} = -2 \qquad Z''_{y\lambda} = 1$$

$$Z''_{\lambda\lambda} = 0$$

Also

$$
D = \begin{vmatrix} -2^{+} & 0^{-} & 2^{+} \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$= (-2)(-1) + 2 \cdot 4 \quad = 10 > 0$

Also Maximum im Punkt

$x = \frac{11}{5}$

$y = -\frac{2}{5}$

$z = -\left(\frac{11}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 10\,\frac{11}{5} + 2\left(-\frac{2}{5}\right) - 23$

$= \frac{-11^2 - 2^2 + 10 \cdot 11 \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 23 \cdot 5^2}{5^2}$

$= \frac{-170}{25} = \frac{-34}{5}$