Aufgabe 1

Lagrange-Funktion

$$z(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + y - 1)$$

Damit

$$z'_x = 2x + 3\lambda$$

$$z'_y = 4y + \lambda$$

$$z'_\lambda = 3x + y - 1$$

Notwendige Bedingung

① $2x + 3\lambda = 0$

② $4y + \lambda = 0$

③ $3x + y - 1 = 0$

① liefert $3\lambda = -2x$; d.h. $\lambda = -\frac{2}{3}x$

eingesetzt in ② liefert $4y - \frac{2}{3}x = 0$;

d.h. $4y = \frac{2}{3}x$; d.h. $y = \frac{1}{6}x$

eingesetzt in ③

$$3x + \frac{1}{6}x - 1 = 0$$

$$\frac{19}{6}x = 1 \quad ; \quad x = \frac{6}{19}$$

Also $y = \frac{1}{6}\frac{6}{19} = \frac{1}{19}$

Damit

$$z = \left(\frac{6}{19}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{19}\right)^2$$

$$= \frac{36+2\cdot 1}{19^2}$$

$$= \frac{38}{19^2} = \frac{2}{19}$$

Also Minimum im Punkte

$$\left(\frac{6}{19} \,\middle|\, \frac{1}{19} \,\middle|\, \frac{2}{19}\right)$$

Aufgabe 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				
-1	1	1	0	0	5			
1	2	0	1	0	25	$25/1 = 25$		
$\boxed{3}$	1	0	0	1	45	$45/3 = 15]$	$:3$	
-1	-1	0	0	0	0			
-1	1	1	0	0	5	$+$		
1	2	0	1	0	25	$+$		
$\boxed{1}$	$1/3$	0	0	$1/3$	15	$+$ (-1)	$+$	
-1	-1	0	0	0	0		$+$	
0	$4/3$	1	0	$1/3$	20	15		
0	$\boxed{5/3}$	0	1	$-1/3$	10	$6]$	$: 5/3$	
1	$1/3$	0	0	$1/3$	15	45		
0	$-2/3$	0	0	$1/3$	15			
0	$4/3$	1	0	$1/3$	20	$+$		
0	$\boxed{1}$	0	$3/5$	$-1/5$	6	$(-4/3)$	$(-1/3)$	$2/3$
1	$1/3$	0	0	$1/3$	15		$+$	
0	$-2/3$	0	0	$1/3$	15			$+$
0	0	1	$-4/5$	$3/5$	12			
0	1	0	$3/5$	$-1/5$	6			
1	0	0	$-1/5$	$2/5$	13			
0	0	0	$2/5$	$1/5$	19			

Also

$$x_1 = 13$$

$$x_2 = 6$$

$$z = 19$$

Probe:

$$z = 13 + 6 = 19 \checkmark$$

Aufgabe 3

Es gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$= (\sin x)^2 - (\cos x)^2 \qquad = 0$$

Also

$$(\sin x)^2 = (\cos x)^2$$

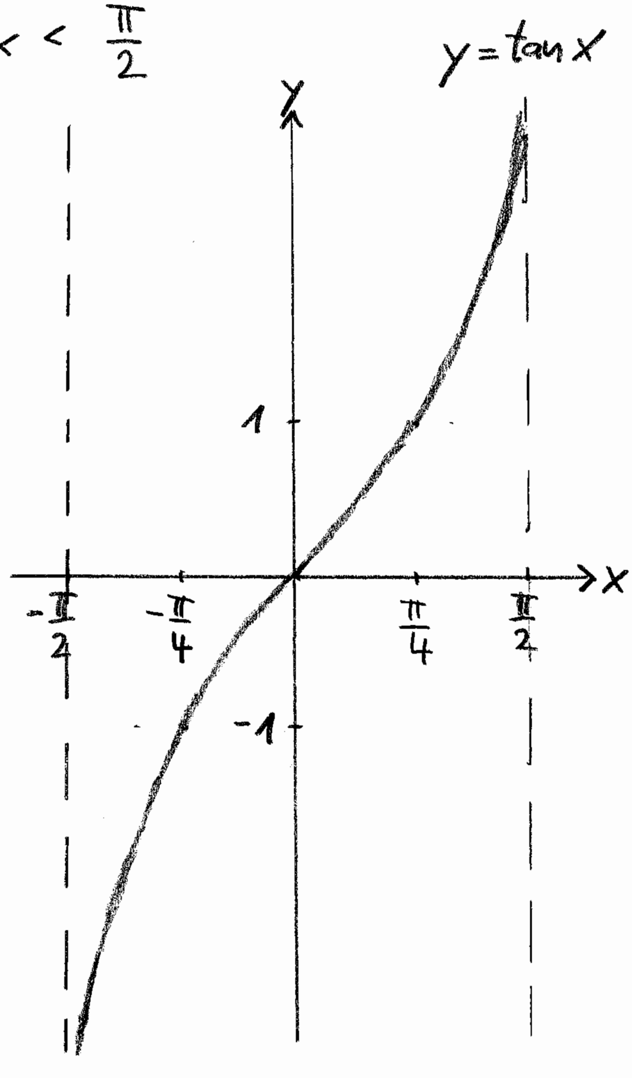
Da $\cos x \neq 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\underbrace{\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}}_{(\tan x)^2} = 1$$

d.h. $\tan x = \pm 1$

also (Skizze!)

$$x = \pm \frac{\pi}{4}$$



Aufgabe 4

Substitution $g = x^2 + 7x + 5$

dann $\frac{dg}{dx} = 2x + 7$

$$dx = \frac{dg}{2x+7}$$

Also

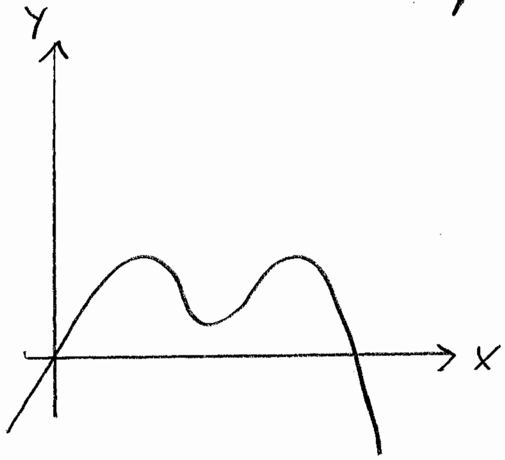
$$\int \frac{-2x-7}{x^2+7x+5}\,dx = \int \frac{-2x-7}{g} \frac{dg}{2x+7}$$

$$= - \int \frac{1}{g}\,dg = -\ln g + C$$

$$= -\ln(x^2+7x+5) + C$$

Aufgabe 5

y ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 4, also hat der Graph eine M-Form



Es genügt daher, die relativen Extremwerte zu untersuchen.

Notwendige Bedingung

$$y' = -3 \cdot 4x^3 + 20 \cdot 3x^2 - 36 \cdot 2x$$
$$= -12x^3 + 60x^2 - 72x$$

Aus $y' = 0$ folgt

$$-12x^3 + 60x^2 - 72x = 0 \quad | :12$$

$$-x^3 + 5x^2 - 6x = 0$$

$$x(-x^2 + 5x - 6) = 0$$

Also

$$X = 0 \quad \text{oder} \quad x = \underbrace{\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{-2}}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-2} = \frac{5 \mp 1}{2}$$

d.h. $x = 0$ oder $x = 2$ oder $x = 3$

<u>Hinreichende Bedingung</u>

$$y'' = -12 \cdot 3x^2 + 60 \cdot 2x - 72$$

$$= -36x^2 + 120x - 72$$

für $x = 0$ gilt $y'' = -72$; rel. Max

$$y = 0$$

für $x = 2$ gilt $y'' = -36 \cdot 2^2 + 120 \cdot 2 - 72 = 24$; rel. Min

für $x = 3$ gilt $y'' = -36 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 - 72 = -36$; rel. Max.

$$y = -3 \cdot 3^4 + 20 \cdot 3^3 - 36 \cdot 3^2$$

$$= -27$$

Also absolutes Maximum im Punkt

$$(0 \mid 0)$$