# Aufgabe 1

Tangentengleichung für $x_0 = 1$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

mit

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

Also

$$f'(1) = \frac{1}{2}\, 3^{-\frac{1}{2}}\, 2 = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$f(1) = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Damit ist die Tangentengleichung

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \sqrt{3}$$

## Aufgabe 2

$$z'_x = 4(x-y)$$

$$z'_y = 4(x-y)(-1) + e^y + ye^y$$

$$= 4(y-x) + (y+1)e^y$$

Notwendige Bedingung

Aus $z'_x = 0$ und $z'_y = 0$ folgt

① $4(x-y) = 0$ ; d.h. $x = y$

② $4(y-x) + (y+1)e^y = 0$

Mit ① in ② folgt

$$(y+1)\underbrace{e^y}_{>0} = 0$$

Also

$$y+1 = 0 \text{ ; d.h. } y = -1$$

Damit waagrechte Tangentialebene für

$$x = -1 \text{ und } y = -1$$

Hinreichende Bedingung

$$z''_{xx} = 4$$

$$z''_{yy} = 4 + e^y + (y+1)e^y$$

$$= 4 + (y+2)e^y$$

$$z''_{xy} = -4$$

Also für $x=-1$ und $y=-1$

$$z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2$$

$$= 4 \cdot (4 + 1 \cdot e^{-1}) - (-4)^2$$

$$= 16 + \frac{4}{e} - 16$$

$$= \frac{4}{e} > 0$$

d.h. ein relativer Extremwert liegt vor;

wegen $z''_{xx} = 4 > 0$ ist es ein Minimum.

Es gilt dort

$$z = 2 \cdot 0 + (-1) e^{-1}$$

$$= \frac{-1}{e}$$

d.h. Punkt $\left(-1 \mid -1 \mid \frac{-1}{e}\right)$ ist Minimum

## Aufgabe 3

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & x & 1 & 0 & \\
2 & 0 & 0 & \boxed{2} & :2 \\
x & x & 0 & 1 & \\
1 & 0 & x & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & x & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & \boxed{1} & \cdot(-1) \\
x & x & 0 & 1 & + \\
1 & 0 & x & 1 & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & x & \boxed{1} & 0 & \cdot(-x) \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
x-1 & x & 0 & 0 & \\
0 & 0 & x & 0 & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & x & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
x-1 & \boxed{x} & 0 & 0 & :x \\
-x & -x^2 & 0 & 0 &
\end{array}$$

1. Voraussetzung: $x \neq 0$

$$\begin{array}{cccc|ll}
1 & x & 1 & 0 & + & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\frac{x-1}{x} & \boxed{1} & 0 & 0 & \cdot(-x) & \cdot x^2 \\
-x & -x^2 & 0 & 0 & & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
2-x & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{x-1}{x} & 1 & 0 & 0 \\
\boxed{x^2-2x} & 0 & 0 & 0
\end{array} \quad : (x^2-2x)$$

<u>2. Voraussetzung</u>: $x^2-2x \neq 0$

d.h. (da $x \neq 0$) $x \neq 2$

$$\begin{array}{cccc}
2-x & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{x-1}{x} & 1 & 0 & 0 \\
\boxed{1} & 0 & 0 & 0
\end{array} \quad + \quad + \quad + \quad \cdot -(2-x) \quad \cdot(-1) \quad \cdot\left(-\frac{x-1}{x}\right)$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

falls beide Voraussetzungen erfüllt,

d.h. $x \neq 0$ und $x \neq 2$,

dann Vektoren linear unabhängig

## 1. Sonderfall: $x = 0$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

also Vektoren linear abhängig

## 2. Sonderfall: $x = 2$

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1/2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

also Vektoren linear abhängig

# Aufgabe 4

Substitution $g = ax^3 + 1$

dann $\frac{dg}{dx} = 3ax^2$

also $dx = \frac{dg}{3ax^2}$

$$\int \frac{ax^2}{ax^3+1}\,dx = \int \frac{ax^2}{g} \frac{dg}{3ax^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{g}\,dg = \frac{1}{3} \ln g + c$$

$$= \frac{1}{3} \ln(ax^3+1) + c$$

Damit

$$\int_0^1 \frac{ax^2}{ax^3+1}\,dx = \left[ \frac{1}{3} \ln(ax^3+1) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} \ln(a+1) - \frac{1}{3} \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{3} \ln(a+1) = 1$$

d.h.

$$\ln(a+1) = 3$$

also

$$a+1 = e^3$$

$$a = e^3 - 1 > 0$$

## Aufgabe 5

### Auflösung der Ungleichungen

① $5x_2 \leq 40 - 4x_1$ ; $x_2 \leq 8 - \frac{4}{5}x_1$

② $10x_2 \leq 50 - x_1$ ; $x_2 \leq 5 - \frac{1}{10}x_1$

③ $10x_2 \geq 4x_1$ ; $x_2 \geq \frac{2}{5}x_1$

④ $2x_2 \geq 8 - x_1$ ; $x_2 \geq 4 - \frac{1}{2}x_1$

⑤ $x_1 \geq 2$

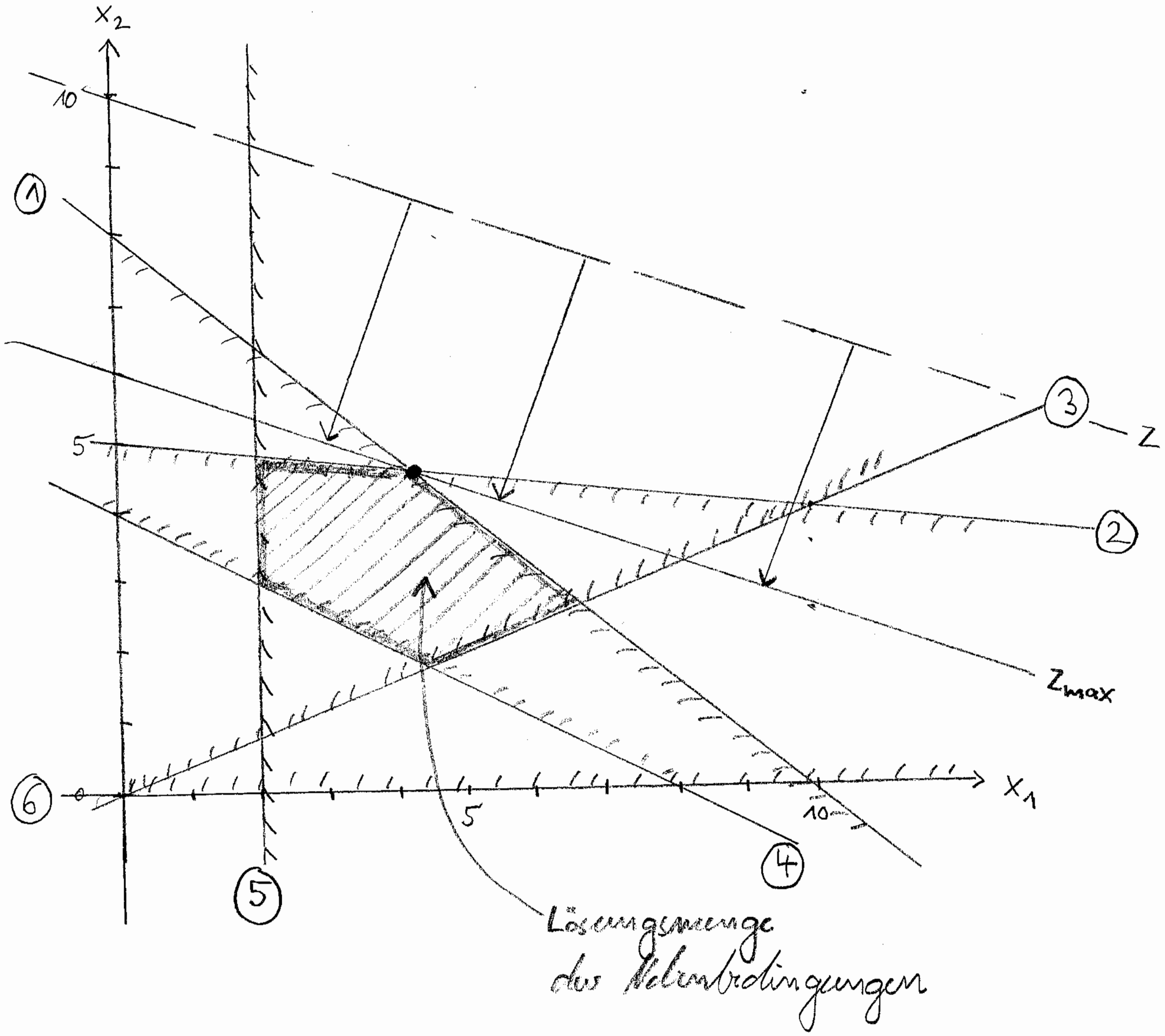
⑥ $x_2 \geq 0$

### Auflösung der Zielfunktion

$$20x_2 = z - 7x_1 \; ; \quad x_2 = \frac{z}{20} - \frac{7}{20}x_1$$

Sei $z = 200$, dann

$$x_2' = 10 - \frac{7}{20}x_1$$




Durch Ablesen

$x_1 \approx 4{,}3$

$x_2 \approx 4{,}6$

Also

$z \approx 7 \cdot 4{,}3 + 20 \cdot 4{,}6 \approx 122$