Aufgabe 1

Substitution $g = ax^2 + \pi$

dann $\frac{dg}{dx} = 2ax$

also $dx = \frac{dg}{2ax}$

$$\int ax \cos g \frac{dg}{2ax} = \frac{1}{2} \int \cos g \, dg$$

$$= \frac{1}{2} \sin g + C$$

$$= \frac{1}{2} \sin(ax^2 + \pi) + C$$

Damit

$$\int_0^{\sqrt{a}} ax \cos(ax^2 + \pi)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin(ax^2 + \pi) \right]_0^{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2} \sin(a^2 + \pi) - \frac{1}{2} \underbrace{\sin \pi}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2} \sin(a^2 + \pi) = 0$$

erfüllt für $a^2 + \pi = 2\pi$

d.h. $a^2 = \pi$

also $a = \sqrt{\pi} > 0$

Aufgabe 2 (a)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ + \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1_{+} & 0_{-} & x_{+} & 1_{-} \\ x-1_{-} & 0_{+} & 0_{-} & 1_{+} \\ 1_{+} & \boxed{1}_{-} & 0_{+} & 0_{-} \\ 2_{-} & 0_{+} & 1_{-} & 0_{+} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x-1 & 0 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \cdot(-x) \end{matrix}$$

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1-2x_{+} & 0_{-} & 1_{+} \\ x-1_{-} & 0_{+} & 1_{-} \\ 2_{+} & \boxed{1}_{-} & 0_{+} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-1)\begin{vmatrix} 1-2x & 1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left((1-2x)\cdot 1 - 1\cdot(x-1)\right)$$

$$= 2\,(1-2x-x+1)$$

$$= 2\,(2-3x)$$

$$= 4-6x$$

(6) $D = 4-6x = 0$

$$4 = 6x$$

$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3

$$z'_x = 2x + ay$$

$$z'_y = ax + 4y$$

Waagrechte Tangentialebene heißt

$z'_x = 0$ und $z'_y = 0$

Also

① $2x + ay = 0$

② $ax + 4y = 0$

Aus ① folgt $2x = -ay$, d.h. $x = -\frac{a}{2}y$;

eingesetzt in ② liefert

$$a \cdot \left(-\frac{a}{2}y\right) + 4y = 0$$

$$-\frac{a^2}{2}y + 4y = 0$$

$$y\left(4 - \frac{a^2}{2}\right) = 0$$

Voraussetzung: $\frac{a^2}{2} \neq 4$, d.h. $a^2 \neq 8$,

d.h. $a \neq \pm\sqrt{8}$

dann folgt $y = 0$ und mit ① auch

$$x = -\frac{a}{2} \cdot 0 = 0$$

Also waagrechte Tangentialebene genau für

$x = 0$ und $y = 0$

<u>Sonderfall</u> $a = \pm\sqrt{8}$.

dann $y = c$ beliebig und mit ① folgt

$$x = -\frac{a}{2}c$$

Also waagrechte Tangentialebene in allen solchen Punkten

Aufgabe 4

Auflösung der Ungleichungen

(1) $5x_2 \leq 20 + 3x_1$; $x_2 \leq 4 + \frac{3}{5}x_1$

(2) $x_2 \leq 9 - x_1$

(3) $3x_2 \geq 9 - x_1$; $x_2 \geq 3 - \frac{1}{3}x_1$

(4) $3x_2 \geq 15 - 5x_1$; $x_2 \geq 5 - \frac{5}{3}x_1$

(5) $x_1 \geq 0$

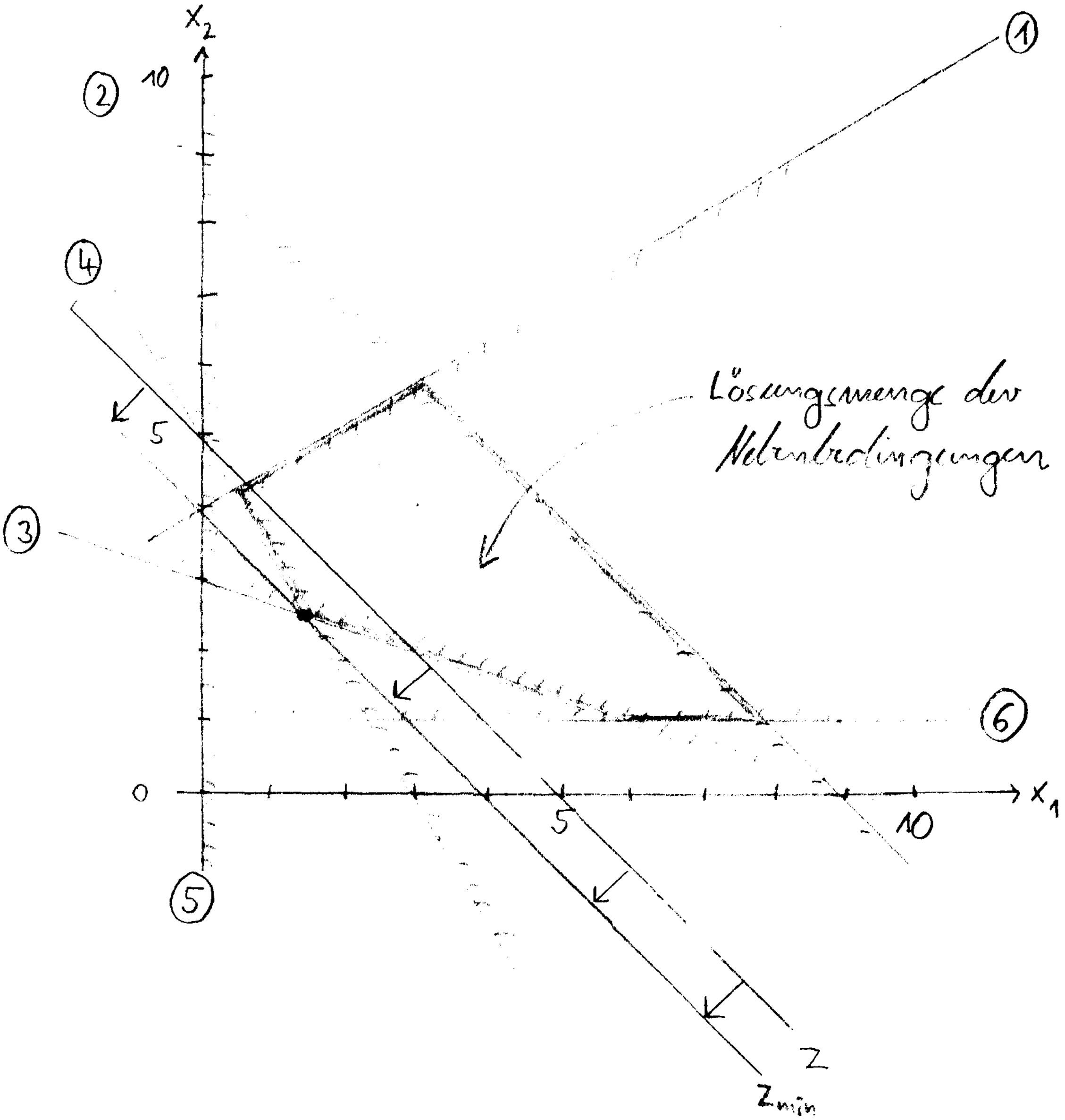
(6) $x_2 \geq 1$

Auflösung der Zielfunktion

$x_2 = z - x_1$

sei $z = 5$, dann

$x_2 = 5 - x_1$



Durch Ablesen:

$x_1 = 1{,}5$

$x_2 = 2{,}5$

Also $Z = 1{,}5 + 2{,}5 = 4$

Aufgabe 5

Notwendige Bedingung

$$y' = 2x \cdot e^{2x} + x^2 e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2(x^2 + x)\underbrace{e^{2x}}_{>0}$$

Aus $y' = 0$ folgt

$$2(x^2 + x) = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

Also $x = 0$ oder $x = -1$

Hinreichende Bedingung

$$y'' = 2(2x+1)e^{2x} + 2(x^2+x)e^{2x}\,2$$

$$= 2e^{2x}(2x+1 + 2x^2 + 2x)$$

$$= 2e^{2x}(2x^2 + 4x + 1)$$

Fall 1: $x = 0$

$$y'' = 2 \cdot e^0 \cdot (0 + 0 + 1) = 2 > 0$$

also Minimum im Punkt $(0|0)$

Fall 2: $x = -1$

$$y'' = 2e^{-2}(2-4+1)$$

$$= -2e^{-2} = \frac{-2}{e^2} < 0$$

also Maximum im Punkt

$$\left(-1 \,\middle|\, \underbrace{1 \cdot e^{-2}}_{\frac{1}{e^2}}\right)$$