Aufgabe 1

$$z = ax^2 + xy + a(y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + y = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2ay = 0$$

Gaußsches Eliminationsverfahren

x	y		
$2a$	1	0	$+$
$\boxed{1}$	$2a$	0	$\cdot(-2a)$
0	$\boxed{1-4a^2}$	0	$:(1-4a^2)$
1	$2a$	0	Vorauss: $4a^2 \neq 1$
0	$\boxed{1}$	0	$\cdot(-2a)$ d.h. $a \neq \pm\frac{1}{2}$
1	$2a$	0	$+$
0	1	0	
1	0	0	

Also genau eine Lösung falls $a \neq \pm\frac{1}{2}$

Spezialfall $a = \pm \frac{1}{2}$

x	y	
~~0~~	~~0~~	~~0~~
1	$2a$	0
1	$2a$	0

Also unendlich viele Lösungen falls $a = \pm \frac{1}{2}$.

Genau ein Punkt mit waagrechter Tangentialebene also nur für $a \neq \pm \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l}
0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & + \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & + \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & \boxed{5} & 1 & 0 & 1 & :5 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & + \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1/5 & 0 & 1/5 & \cdot(-2) \\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & -2/5 & 1 & -2/5 & \\
0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 1/5 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -2/5 & 1 & -2/5 & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 1/5 & \\
\hline
\end{array}
$$

$$\uparrow$$

$$A^{-1}$$

$\Rightarrow$

Also

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/5 & 1 & -2/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + 1 - 2 \\ 5 + 0 + 0 \\ 1 + 0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Notwendige Bedingung:

Produktregel

$$y' = x^3 e^x + 3x^2 e^x$$

$$= (x^3 + 3x^2)\, e^x = 0$$

d.h.

$$x^3 + 3x^2 = 0$$

$$x^2 (x+3) = 0$$

$$(x = 0 \quad \text{oder}) \quad x = -3$$

Hinreichende Bedingung:

$$y'' = (x^3 + 3x^2) e^x + (3x^2 + 6x) e^x$$

$$= (x^3 + 6x^2 + 6x)\, e^x$$

Für $x = -3$

$$y''(-3) = ((-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 + 6\cdot(-3))\, e^{-3}$$

$\longrightarrow$

$$= 9 \cdot e^{-3} > 0$$

$$y(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -\frac{27}{e^3}$$

Also ein Minimum im Punkt

$$\left(-3 \mid -\frac{27}{e^3}\right)$$

Aufgabe 4

Substitution $g = x^4$

also $\frac{dg}{dx} = 4x^3$

also $dx = \frac{dg}{4x^3}$

Damit

$$\int x^3 e^{x^4}\,dx = \int x^3 e^g \frac{dg}{4x^3}$$

$$= \int \frac{1}{4} e^g \, dg$$

$$= \frac{1}{4} \int e^g \, dg$$

$$= \frac{1}{4} e^g + C$$

$$= \frac{1}{4} e^{x^4} + C$$

und so

$\rightarrow$

$$\int_0^a x^3 e^{x^4} = \left[\frac{1}{4} e^{x^4} \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{a^4} - e^0 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{a^4} - 1 \right] = 2$$

d.h.

$$e^{a^4} - 1 = 8$$

$$e^{a^4} = 9$$

$$a^4 = \ln 9$$

$$a = \pm \sqrt[4]{\ln 9}$$

Da $a > 0$

$$a = \sqrt[4]{\ln 9}$$

Aufgabe 5

Lineares Programm in normierter Form:

$$
\begin{aligned}
-3x_1 - x_2 &\leq -6 \\
x_1 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 6 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
z - x_1 - x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Simplex-Verfahren

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
-3	$\boxed{-1}$	1	0	0	-6]	:(-1)
1	0	0	1	0	4	
0	1	0	0	1	6	
-1	-1	0	0	0	0	
3	$\boxed{1}$	-1	0	0	6	·(-1) +
1	0	0	1	0	4	
0	1	0	0	1	6	+
-1	-1	0	0	0	0	+

→

3	1	-1	0	0	6		+
1	0	0	1	0	4		
-3	0	$\boxed{1}$	0	1	0	$\frac{0}{1}=0$]	++
2	0	-1	0	0	6		+
0	1	0	0	1	6		
$\boxed{1}$	0	0	1	0	4	$\frac{4}{1}=4$] $\cdot 3$	+
-3	0	1	0	1	0		+
-1	0	0	0	1	6		+
0	1	0	0	1	6		
1	0	0	1	0	4		
0	0	1	3	1	12		
0	0	0	1	1	10		

Also

$x_1 = 4$

$x_2 = 6$

$z = 10$