Aufgabe 1

$$
\begin{array}{cccc|l}
\boxed{1} & 0 & 0 & a & \cdot(-a) \\
a & 1 & 0 & 0 & + \\
0 & a & 1 & 0 & \\
0 & 0 & a & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 0 & 0 & a & \\
0 & \boxed{1} & 0 & -a^2 & \cdot(-a) \\
0 & a & 1 & 0 & + \\
0 & 0 & a & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 0 & 0 & a & \\
0 & 1 & 0 & -a^2 & \\
0 & 0 & \boxed{1} & a^3 & \cdot(-a) \\
0 & 0 & a & 1 & +
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & 0 & 0 & a & \\
0 & 1 & 0 & -a^2 & \\
0 & 0 & 1 & a^3 & \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1-a^4} & :(1-a^4)
\end{array}
$$

$\leftarrow$ Voraussetzung $1-a^4 \neq 0$

$$
\begin{array}{cccc|lll}
1 & 0 & 0 & a & + & & \\
0 & 1 & 0 & -a^2 & & + & \\
0 & 0 & 1 & a^3 & & & + \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \cdot(-a) & \cdot a^2 & \cdot(-a^3)
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Da 4 Zeilen übrig bleiben, beträgt der Rang von A auch 4.

<u>Sonderfall</u>: $1 - a^4 = 0$

d.h. $a^4 = 1$; d.h. $a = \pm 1$

Dann

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}$$

Da 3 Zeilen übrig bleiben, beträgt der Rang von A auch 3.

Aufgabe 2

Notwendige Bedingung

$$z_x' = -\frac{1}{x^2} + x = 0$$

$$z_y' = -2 + \frac{1}{y} = 0$$

d.h.

$$-1 + x^3 = 0, \text{ d.h. } x^3 = +1, \text{ d.h. } x = 1$$

und

$$\frac{1}{y} = 2, \text{ d.h. } y = \frac{1}{2}$$

Hinreichende Bedingung

$$z_{xx}'' = -\frac{-2}{x^3} + 1 = \frac{2}{x^3} + 1 = \frac{2}{1^3} + 1 = 3$$

$$z_{xy}'' = 0$$

$$z_{yy}'' = \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{(\frac{1}{2})^2} = -4$$

Also

$$z_{xx}'' z_{yy}'' - (z_{xy}'')^2 = 3 \cdot (-4) - 0$$

$$= -12 < 0$$

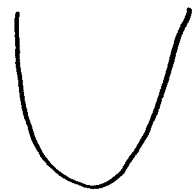
Also hat die Funktion keine relativen Extremwerte.

B3

Aufgabe 3

Für D:

$$x^2 - 4x + 6 \geq 0$$



$a_0 = 1 > 0$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad \text{nicht definiert}$$

also Ungleichung stets erfüllt und so

$D = \mathbb{R}$

Für W:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 6} = y \quad \Big|^2 \qquad *$$

$$x^2 - 4x + 6 = y^2$$

$$1x^2 + (-4)x + (6 - y^2) = 0$$

$$x_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (6 - y^2)}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8 + 4y^2}}{2}$$

und so notwendig

$$-8 + 4y^2 \geq 0$$

$$y^2 \geq 2$$

$$y \geq \sqrt{2} \text{ oder } y \leq -\sqrt{2}$$

da $y \geq 0$ wegen $*$

$$W = [\sqrt{2} ; \infty[$$

Aufgabe 4

Es gilt

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Substitution: $g = x \ln x$

dann $$\frac{dg}{dx} = x \frac{1}{x} + 1 \ln x$$

$$= 1 + \ln x$$

und so

$$dg = (1 + \ln x)\, dx$$

Also

$$\int (1+\ln x)\, e^{g}\, dx = \int e^{g}\, dg = e^{g} + C$$
$$= x^x + C$$

womit

$$\int_a^1 (1+\ln x)\, x^x\, dx = 1^1 - a^a$$

$$= 1 - a^a$$

Aufgabe 5

Normierte Form:

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_2 \leq 5$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq 60$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

$$z = x_1 + 2x_2 \quad \text{max.}$$

Simplexverfahren

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
-1	$\boxed{1}$	1	0	0	2	2]	·(-1)·(-6)·2
0	1	0	1	0	5	5	+
5	6	0	0	1	60	10	+
-1	-2	0	0	0	0		+
-1	1	1	0	0	2		+
$\boxed{1}$	0	-1	1	0	3	3]	+ (-11)·3
11	0	-6	0	1	48	$\frac{48}{11}$	+
-3	0	2	0	0	4		+
0	1	0	1	0	5		
1	0	-1	1	0	3		
0	0	$\boxed{5}$	-11	1	15	3]	:5
0	0	-1	3	0	13		

0	1	0	1	0	5	
1	0	-1	1	0	3	+
0	0	$\boxed{1}$	-11/5	1/5	3	+
0	0	-1	3	0	13	+

0	1	0	$\boxed{1}$	0	5	$\cdot \frac{6}{5}$	$\frac{11}{5}$
1	0	0	-6/5	1/5	6	+	
0	0	1	-11/5	1/5	3		+
0	0	0	4/5	1/5	16		+

Also

$x_1 = 6$

$x_2 = 5$

$Z_{max} = 16$