Aufgabe 1

(a) Tilgungsplan:

k	Z	T	R	$Z+T$
1	911,40	3.675,00	14.700,00	4.586,40
2	683,55	3.675,00	11.025,00	4.358,55
3	455,70	3.675,00	7.350,00	4.130,70
4	227,85	3.675,00	3.675,00	3.902,85

keine Rundungskorrektur nötig

(b)

$$A = \frac{14.700}{\frac{1}{1{,}062^4}\,\frac{1{,}062^6 - 1}{0{,}062}} = 4.261{,}74\ €$$

Tilgungsplan:

k	Z	T	R	A
1	911,40	3.350,34	14.700,00	4.261,74
2	703,68	3.558,06	11.349,66	4.261,74
3	483,08	3.778,66	7.791,60	4.261,74
4	248,80	4.012,94	4.012,94	4.261,74

keine Rundungskorrektur nötig

Aufgabe 2

Da $F(q_e) = 0$ genau wenn

$$F^*(q_e) = \frac{F(q_e)}{K_0} = 0$$

kann $K_0 = c = 1$ gesetzt werden.

$c_1 = 0{,}4$; $c_2 = 0{,}4$; $c_3 = 0{,}3$; $c_4 = 0{,}4$; $c_5 = 0{,}2$

$V = 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}2 = 1{,}7$

Also

$$F(q) = -1 + \frac{1}{q^5} \cdot [0{,}4 \cdot q^4 + 0{,}4 \cdot q^3 + 0{,}3 \cdot q^2 + 0{,}4 \cdot q + 0{,}2]$$

$$F'(q) = \frac{-1}{q^6} \cdot [0{,}4 \cdot q^4 + 0{,}8 \cdot q^3 + 0{,}9 \cdot q^2 + 1{,}6 \cdot q + 1{,}0]$$

$$q_1 = \sqrt[5]{\frac{1{,}7}{1}} = 1{,}11196$$

Iterationstabelle:

k	q	$F(q)$	$F'(q)$
1	1,11196	0,280718	−2,96425
2	1,20666	0,0438251	−2,10400
3	1,22749		

Damit $p_e = 22{,}75$

Aufgabe 3

Auf- bzw. Abzinsung aller Zahlungen auf Ende 2020:

$$\begin{Bmatrix}\text{Endwert}\\ r\end{Bmatrix} \cdot q^2 = \begin{Bmatrix}\text{Barwert}\\ s\end{Bmatrix}$$

$$r \cdot (12 + \frac{11}{2} \cdot (q-1)) \cdot \frac{q^{11}-1}{q-1} \cdot q^2 = \frac{s}{q^4} \cdot \frac{q^5-1}{q-1}$$

Also

$$s = \frac{r \cdot (12 + \frac{11}{2} \cdot (q-1)) \cdot (q^{11}-1) \cdot q^2 \cdot q^4}{q^5-1}$$

$$s = \frac{r \cdot (12 + \frac{11}{2} \cdot (q-1)) \cdot (q^{11}-1) \cdot q^6}{q^5-1}$$

Mit den Zahlen:

$$s = \frac{300 \cdot (12 + \frac{11}{2} \cdot 0{,}056) \cdot (1{,}056^{11}-1) \cdot 1{,}056^6}{1{,}056^5-1}$$

$s = 13.422{,}88$ €

Aufgabe 4

Aufzinsung aller Zahlungen zum Ende des $(2\cdot n)$-ten Jahres:

$$B \cdot q^{2n} = \begin{Bmatrix} \text{Endwert} \\ \text{1. Teil} \end{Bmatrix} \cdot q^n + \begin{Bmatrix} \text{Endwert} \\ \text{2. Teil} \end{Bmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} B \cdot q^{2n} &= \left(r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + (-a) \cdot \left[\frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} \right] \right) \cdot q^n \\ &\quad + r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + a \cdot \left[\frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} \right] \end{aligned}$$

Auflösen nach r:

$$B \cdot q^{2n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \left(q^n + 1 \right) + a \cdot \left[\frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} \right] \cdot \left(-q^n + 1 \right)$$

$$r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \left(q^n + 1 \right) = B \cdot q^{2n} - a \cdot \left[\frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} \right] \cdot \left(1 - q^n \right)$$

$$r = \frac{B \cdot q^{2n} - a \cdot \left[\frac{q^n - 1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} \right] \cdot \left(1 - q^n \right)}{\frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \left(q^n + 1 \right)}$$

Aufgabe 5

Aufzinsung aller Zahlungen zum Ende des *n*-ten Jahres:

$$E = r \cdot q^n + r{\cdot}Q \cdot q^{n-1} + r{\cdot}Q^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + r{\cdot}Q^{n-1} \cdot q$$

Aus $x = \frac{Q}{q}$ folgt $Q = x{\cdot}q$ und damit

$$E = r \cdot q^n + r{\cdot}x{\cdot}q \cdot q^{n-1} + r{\cdot}x^2\, q^2{\cdot}\, q^{n-2} + \ldots + r{\cdot}x^{n-1} \cdot q^{n-1}{\cdot}\, q$$

$$E = r \cdot q^n + r{\cdot}x{\cdot}\, q^n + r{\cdot}x^2 \cdot q^n + \ldots + r{\cdot}x^{n-1} \cdot q^n$$

$$E = r \cdot q^n \cdot (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

$$E = r \cdot q^n \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$E = r \cdot q^n \cdot \frac{\left(\frac{Q}{q}\right)^n - 1}{\frac{Q}{q} - 1} = r \cdot q^n \cdot \frac{\frac{Q^n}{q^n} - 1}{\frac{Q}{q} - 1}$$

$$E = r \cdot \frac{Q^n - q^n}{\frac{Q}{q} - 1} = r \cdot q \cdot \frac{Q^n - q^n}{Q - q}$$